INNEHÅLL

BILAGOR

NÅGRA DEFINITIONER OCH SATSER UR VEKTOR-ALGEBRAN

En *skalär* är en storhet, t ex massa, längd, temperatur som kan representeras av ett reellt tal (17, $\sqrt{2}$ etc). Vanliga räkneregler för reella tal gäller. Vi skall i denna bilaga vanligen beteckna skalärer med grekiska bokstäver α, β, γ.

En *vektor* i det vanliga 3-dimensionella rummet är en storhet som geometriskt kan representeras av en pil (riktad sträcka), dvs den har både *belopp* och *riktning* (bild 1). Vi betecknar här vektorer med latinska bokstäver $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ . . .

Vektorer är t ex position, hastighet, acceleration, kraft, elektrisk fältstyrka, magnetisk fältstyrka.

Vektorns (pilens) längd kallas dess *belopp* och betecknas $|\bar{a}|$.

Nollvektorn $\bar{0}$, är en vektor med beloppet = 0. Till skillnad från andra vektorer kan den ej tillordnas någon riktning.

Likhet. Två vektorer $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är *lika* (dvs $\bar{a} = \bar{b}$) *endast* om de har samma belopp och samma riktning. (Vektorernas belägenhet i rummet spelar alltså ingen roll).

Multiplikation med skalär. Produkten av skalären α och vektorn $\bar{a}$ tecknas $\alpha\bar{a}$ eller $\bar{a}\alpha$ och är en vektor med beloppet $|\alpha| \cdot |\bar{a}|$ som är

riktad som $\bar{a}$ om $\alpha > 0$
motriktad $\bar{a}$ om $\alpha < 0$
($= \bar{0}$ om $\alpha = 0$)

Negering. Vektorn $-\bar{a}$ definieras som $(-1)\,\bar{a}$.

Addition av vektorer. Summan av vektorerna $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är en vektor $\bar{c}$ som bildas enligt bild 2. Summan skrivs $\bar{a} + \bar{b}$, dvs $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

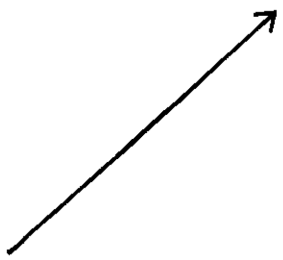


Bild 1 Vektor

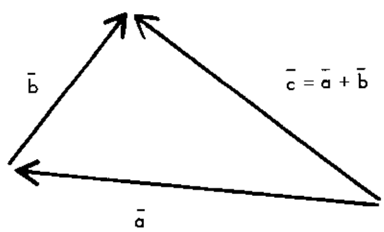


Bild 2 Addition av vektorer

Subtraktion av vektorer. Med *skillnaden* mellan vektorerna $\bar{a}$ och $\bar{b}$ som tecknas $\bar{a} - \bar{b}$ förstår vi lösningen till ekvationen $\bar{a} = \bar{b} + \bar{x}$ (bild 3).

Räkneregler. Följande satser ges utan bevis:

1. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$
2. $\alpha\bar{a} + \beta\bar{a} = (\alpha + \beta)\bar{a}$
3. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
4. $\alpha\bar{a} + \alpha\bar{b} = \alpha(\bar{a} + \bar{b})$
5. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
6. $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$

Enhetsvektor. Om $|\bar{a}| = 1$ är $\bar{a}$ en *enhetsvektor.*

Enhetsvektorer i ett rätvinkligt koordinatsystem. Betrakta det rätvinkliga koordinatsystemet xyz (bild 4). Vi betecknar enhetsvektorerna i respektive koordinatriktningar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Högerkoordinatsystem. Om ej annat sägs används här *högerkoordinatsystem.* Namnet kommer av att en längs z-axeln riktad högergängad skruv som roteras 90° från Ox till Oy rör sig i z-axelns riktning. Allmänt sett bildar tre vektorer $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (bild 5) ett *högersystem*, om de ej är *komplana* (dvs ligger i eller är parallella med samma plan) och om en högergängad skruv riktad längs $\bar{c}$ som roteras en vinkel $< 180^\circ$ från $\bar{a}$ till $\bar{b}$ rör sig i c:s riktning.

Komponenter. En vektor $\bar{a}$ kan alltid placeras utgående från origo i ett tredimensionellt koordinatsystem (bild 6). Låt a_x, a_y och a_z vara vektorspetsens koordinater i systemet. Vektorerna $a_x\bar{i}$, $a_y\bar{j}$ och $a_z\bar{k}$ kallas vektorns *komponentvektorer* i respektive axelriktningar; a_x, a_y och a_z kallas motsvarande *komponenter.* Dessa markeras ofta på följande sätt:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

På bild 6 ser man att

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

Beloppet av $\bar{a}$ erhålls ur Pythagoras sats:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

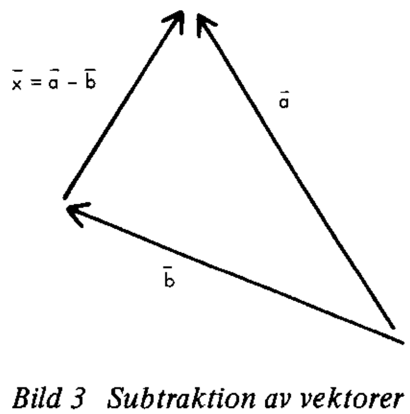


Bild 3 Subtraktion av vektorer

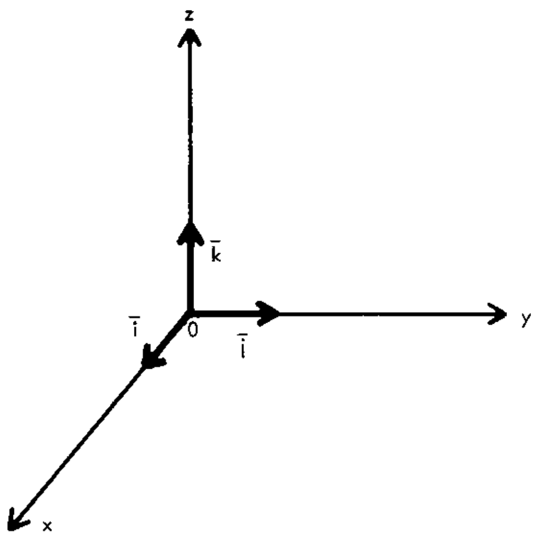


Bild 4 Enhetsvektorer

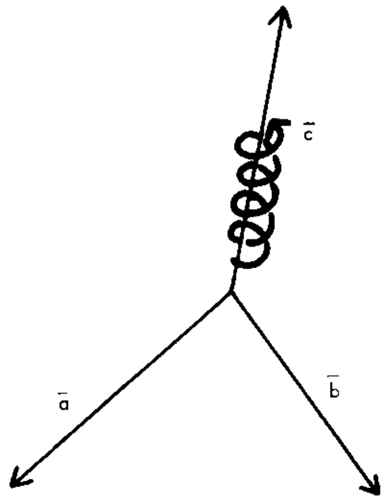


Bild 5 Höger koordinatsystem

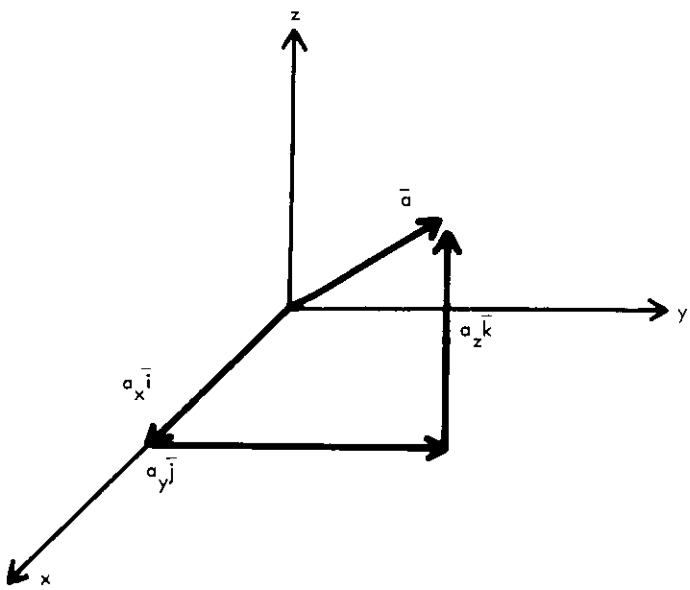


Bild 6 Komponentvektorer

Vektorvärda funktioner. En avbildning av tidsaxeln i mängden av vektorer kallas en *vektorvärd funktion* av tiden.

$$t \rightarrow \bar{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$$

Komponenterna a_x, a_y och a_z är då vanliga funktioner av tiden.

Vektorvärda funktioner kan liksom vanliga funktioner *deriveras* och *integreras.* Dessa operationer definieras på följande sätt:

Derivering: $$\frac{d\,\bar{a}(t)}{dt} = \left(\frac{d\,a_x(t)}{dt}, \frac{d\,a_y(t)}{dt}, \frac{d\,a_z(t)}{dt}\right)$$

Integrering: $$\int \bar{a}(t)\,dt = \left(\int a_x(t)\,dt, \int a_y(t)\,dt, \int a_z(t)\,dt\right)$$

FÖRKORTNINGAR

ABR	Automatisk Besticks Räkning
ACC	Aeronautical Control Center
ADF	Automatic Direction Finder
AIC	Aeronautical Information Circular
AIP	Aeronautical Information Publication
AIS	Aeronautical Information Service
BCL	Bestämmelser för civil luftfart
Befyl	Bestämmelser för militär flygtrafikledning
CAS	Collision Avoidance System
CEP	Circular Error Propability
CW	Continuous Wave
DME	Distance Measuring Equipment
ELKA	Elektronisk kartpresentation
FIR	Flight Information Region
FM	Frequency Modulation
GAT	Greenwich Apparent Time
GCA	Ground Controlled Approach
GEOREF	The World Geographic Reference System
GHA	Greenwich Hour Angle
GMT	Greenwich Mean Time
GST	Greenwich Sidereal Time
HUD	Head-up Display
IAL	Instrument Approach and Landing
ICAO	International Civil Aviation Organization
IFF	Identifying Friend or Foe (= IK)
IFR	Instrument Flight Rules
IK	Igenkänningsutrustning
ILS	Instrument Landing System
IMC	Instrumental Meteorological Conditions
LAT	Latitud
LAT	Local Apparent Time
LC	Landing Chart
LHA	Local Hour Angle
LMT	Local Mean Time
LONG	Longitud
LST	Local Sidereal Time
LZT	Local Zone Time

MILAIP	Militärversionen av Aeronautical Information Publication
MIL NOTAM	Militärversion av Notices to Airmen
MTBF	Mean Time Between Failure
MTI	Moving Targit Indicator
MTTR	Mean Time To Repair
NDB	Non-Directional Beacon
NNSS	Navy Navigation Satellite System
NOTAM	Notices to Airmen
OCL	Obstacle Clearance Limit
OCS	Obstacle Clearance Surface
OSF	Ordnings- och säkerhetsföreskrifter för militär flygning
PAR	Precision Approach Radar
PPI	Planpolär indikator
PWI	Pilot (Proximity) Warning Indicator
QDM	Magnetisk kurs
QDR	Magnetisk bäring
QFE	Lufttryck vid flygplatsens höjd över havet (eller bantröskeln)
QFU	En banas magnetiska riktning
QNH	Höjd över havets medelnivå
QTE	Geografisk bäring
RAK	Rikets allmänna kartverk
RMI	Radio Magnetic Interference
RMS	Root Mean Square
RVR	Runway Visual Range
SRE	Surveillance Radar Element
SSR	Secondary Surveillance Radar (sekundärradar)
TACAN	Tactical Air Navigation
TILS	Tactical Instrument Landing System
TN	Tröghetsnavigering
UTM	Universal Transverse Mercator
VAL	Visual Approach and Landing
VASIS	Visual Approach Slope Indicator System
VDF	Very High Frequency Direction Finder
VFR	Visual Flight Rules
VMC	Visual Meteorological Conditions
VOR	VHF Omnidirectional Radio Range

TILLFÖRLITLIGHET

Följande avsnitt ger en kort introduktion till vissa begrepp inom tillförlitlighetsområdet.

Eftersom navigeringsutrustningen blir alltmer komplex och dyrbar, ställs ökade krav på driftsäkerheten och underhållsbehovet. Underhåll är all verksamhet för att hålla system och utrustningar i funktions- och driftdugligt skick. Driftsäkerheten beror på det tekniska systemets funktionssäkerhet och underhållsmässighet samt på underhållssystemets säkerhet och kapacitet. Driftsäkerheten kan mätas i t ex effektivitet, tillgänglighet, funktionssannolikhet, MTBF, felintensitet. Valet av lämpligt mått beror på utrustningens användning eller funktion. Begreppen definieras nedan.

Med ett *effektivitetsmått* avses i allmänhet en matematisk modell. Modellen är en funktion av ett antal storheter (tillförlitlighetsmått av olika slag). Svårigheten är här att bestämma antalet storheter, som skall ingå i modellen, deras inbördes samband och kriteriet på önskad effektivitet.

Som exempel kan tjäna frågan om huruvida ett flygplan skall utrustas med två eller fyra motorer. Sannolikheten att en motor går sönder under körning är $q = 1 - p$. Flygplanet behöver minst hälften av sina motorer för säker flygning. Som effektivitetsmått väljs E = sannolikheten att minst hälften av motorerna fungerar. Den systemlösning som ger största E önskas. Med binomialfördelningen kan visas att om $0 < q < \frac{1}{3}$ väljs ett 4-motorigt och för $\frac{1}{3} < q < 1$ ett 2-motorigt flygplan. (Den senare sannolikheten för motorbortfall är overkligt stor).

Tillgängligheten för en utrustning är sannolikheten att utrustningen lägst har en viss beredskapsgrad eller funktionstillstånd vid en viss tidpunkt, miljö och givna underhållsförhållanden. Tillgängligheten är en funktion av tiden och avtar monotont.

Funktionssannolikhet är sannolikheten att en enhet skall fungera tillfyllest under en viss tid under givna drift- och miljöförhållanden. Den angivna tiden kan innebära funktionstid, lagringstid eller klartid men kan också översättas till körd sträcka, genomströmmad vätskemängd e d.

MTBF (Mean Time Between Failure) representerar en statistiskt belagd medeltid (i drifttillstånd) mellan fel som förorsakar försämrad funktion hos utrustningen. MTBF används företrädesvis i samband med flera utrustningar och är då medeltiden mellan fel i någon av utrustningarna.

Felintensiteten är en funktion av tiden som beskriver hur en utrustnings godhet förändras. Förslitning medför exempelvis att sannolikheten att en enhet skall upphöra att fungera ökar med tiden. En elektrisk säkring, däremot, kan ej partiellt försämras, vilket innebär att dess felintensitet är konstant. Felintensiteten är 1:MTBF.

De olika driftsäkerhetsmåtten som definierats ovan, används i skilda sammanhang. För en kontinuerligt arbetande radar är bästa driftsäkerhetsmåttet tillgängligheten, som är ett mått på system som kan gå sönder, men som efter reparation åter kan sättas i drift. Funktionssannolikheten används som mått för utrustningar där underhåll ej kan utföras eller enbart utföras vid vissa tidpunkter. Exempel är en uppsänd satellit. Funktionssannolikhet används även i samband med attack- och jaktuppdrag, som skall genomföras.

Med *underhållsmässigheten* avses utrustningens (det tekniska systemets) anpassning till underhållssystemet, möjligheterna till åtgärder för reparation och kravet på resurser för att utföra underhållet. Även för detta finns mått såsom MTTR (Mean Time To Repair), som innebär medeltider för att reparera eller sannolikheten att kunna utföra reparation på viss tid.

Underhållssäkerheten kan mätas i sannolikheten för att underhållsresurser finns tillgängliga när de behövs, eller i medelväntetid på resurser (MWT) eller i sannolikhet för att reparation är möjlig på viss underhållsnivå med hänsyn till resurstillgång.

Sammanfattningsvis skall sägas att *driftsäkerheten* är en kvalitativ egenskap hos ett system eller en utrustning. Driftsäkerheten är sammansatt av de ovan nämnda egenskaperna

- *funktionssäkerhet* (hur ofta uppträder fel och störningar med denna utrustning)
- *underhållsmässighet* (är utrustning lätt att reparera, är förslitningsdelar lättåtkomliga för utbyte) och
- *underhållssäkerhet* (finns ett underhållssystem, verkstäder, verktyg, reparatörer, som klarar av att reparera och underhålla utrustningen)

NOGGRANNHET OCH FELSTATISTIK

Innehåll

1 Allmänt om fel

Om de mätningar av accelerationer, hastigheter, avstånd, riktningar etc som navigationen av ett flygplan eller annan farkost grundar sig på var helt exakta skulle positionsuppfattning och styrorder vara perfekta. I praktiken är alla mätningar behäftade med fel som medför att de ur mätningarna beräknade storheterna, t ex position och styrorder, också blir felaktiga. För en navigatör eller flygförare är det därför absolut nödvändigt att veta vilka fel som förekommer, hur de uppträder och vilken inverkan de har på beräknade storheter.

En av navigatörens väsentligaste uppgifter är att minska inverkan av fel i den primära mätinformationen. I flygplan utan navigatör är det flygföraren som får samma uppgift. Detta gäller oavsett om navigationen sker manuellt med hjälp av information från ett fåtal givare och instrument eller om den sker automatiskt i en dator med information från ett stort antal givare. I det första fallet måste flygföraren eller navigatören bedöma hur tillförlitlig olika delar av navigationsinformationen är. I det senare fallet bör flygföraren eller navigatören veta ungefär hur datorn behandlar informationen och vilka egenskaper presenterade uppgifter har och hur fel i den primära informationen kan påverka dessa uppgifter.

Ett fel är skillnaden mellan verkligt och uppmätt eller presenterat värde på en storhet. Betecknas det verkliga värdet med x, uppmätt värde med $\hat{x}$ och felet med Δx gäller:

$$\Delta x = x - \hat{x}$$

De fel som förekommer i navigationssammanhang, positionsfel, kursfel, instrumentfel av olika slag etc, förändras i regel med tiden. Bild 1 ger exempel på hur felet kan variera med tiden. Felet är ibland tämligen konstant medan det i andra fall växer linjärt eller kvadratiskt med tiden. I ytterligare andra fall finns det inget enkelt samband mellan tid och fel.

Ett fel är sällan helt konstant eller förändras helt linjärt eller kvadratiskt med tiden utan sammansätts ofta av en *systematisk* och en slumpmässigt varierande komponent. Se bild 2. Ett fel i vilket en slumpmässigt varierande komponent ingår kallas för *stokastiskt* och man talar om stokastiska fel i motsats till systematiska. Något riktigt motsatsförhållande existerar inte eftersom en systema-

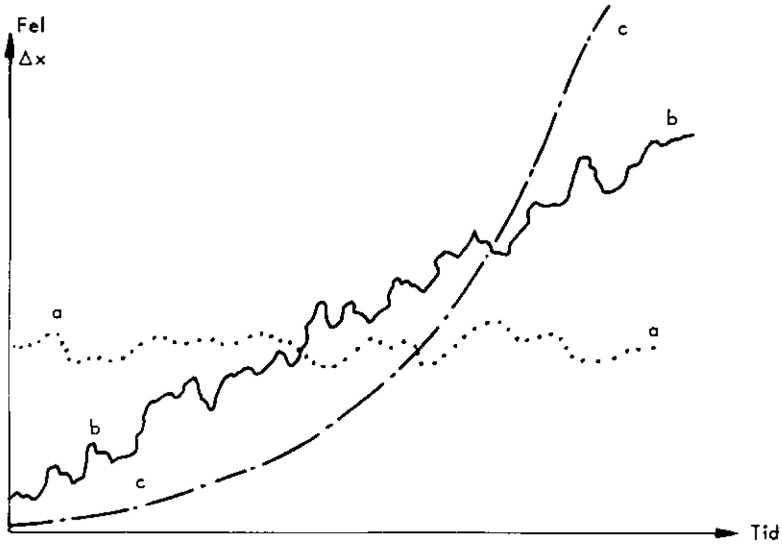


Bild 1 Exempel på fel som funktion av tiden

tisk komponent kan finnas i ett stokastiskt fel. Man brukar dock ofta dela upp felet i en systematisk del och en slumpmässigt varierande del och kalla den sistnämnda för stokastiskt fel.

För att beskriva stokastiska fel måste man använda statistiska begrepp och metoder. Det bör observeras att gränsdragningen mellan systematiska och stokastiska fel inte är enkel och självklar och att en felkomponent beroende på i vilket sammanhang och över vilken tid den betraktas kan vara såväl stokastisk som systematisk.

Betrakta t ex mätfelet hos ett visst instrument i ett stort antal flygplan. Varje instrument har en systematisk och en slumpmässigt varierande komponent. Den systematiska komponenten är emellertid olika för olika flygplan. Se bild 3 och 4. De systematiska felen för varje instrument kan således betraktas som stokastiska när man betraktar ett stort antal instrument. När man betraktar ett antal instrument säger man ofta att man betraktar en *ensemble* av instrument. Ensemblen kan i sin tur vara behäftad med dels en systematisk och dels en rent stokastisk felkomponent.

Ett fel helt utan systematisk komponent men där de slumpmässiga variationerna sker långsamt kan, om man endast betraktar en kortare tidsperiod, betraktas som systematiskt. Se bild 5. Gyrodrift är exempel på ett fel som kan uppträda på detta sätt.

Alla slumpmässigt uppträdande variationer skall egentligen betraktas när man statistiskt vill beskriva ett fel. I praktiken är man dock mest intresserad av en statistisk beskrivning för de, i regel små, fel som uppträder då mätutrustningar och instrument arbetar på normalt sätt. Andra fel, s k *grova fel* som uppkommer t ex apparater går sönder, man tar ut kursen 180° fel eller man använder en karta med fel skala etc, medför i regel att man inte får någon som helst användbar information. Genom att man tar bort de grova felen kan övriga fel beskrivas med enkla statistiska fördelningar vilket underlättar felanalysen högst avsevärt.

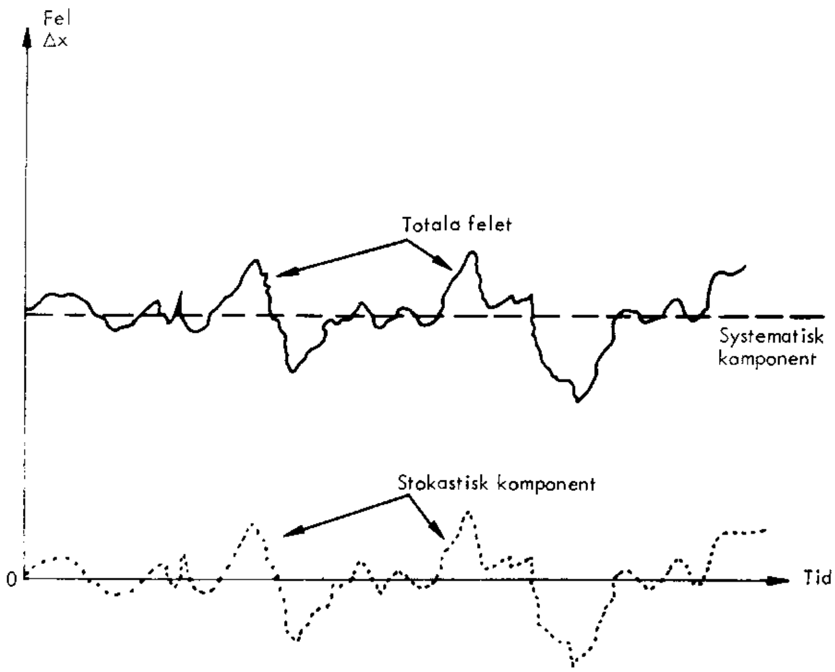


Bild 2 Felet sammansätts ofta av en systematisk och en stokastisk (slumpmässig) komponent

Detta får inte tolkas så att grova fel är oväsentliga. De är tvärtom av största betydelse, men man måste betrakta varje typ av grova fel och varje apparat eller instrument för sig för att kunna eliminera dessa fel eller minska betydelsen av dem.

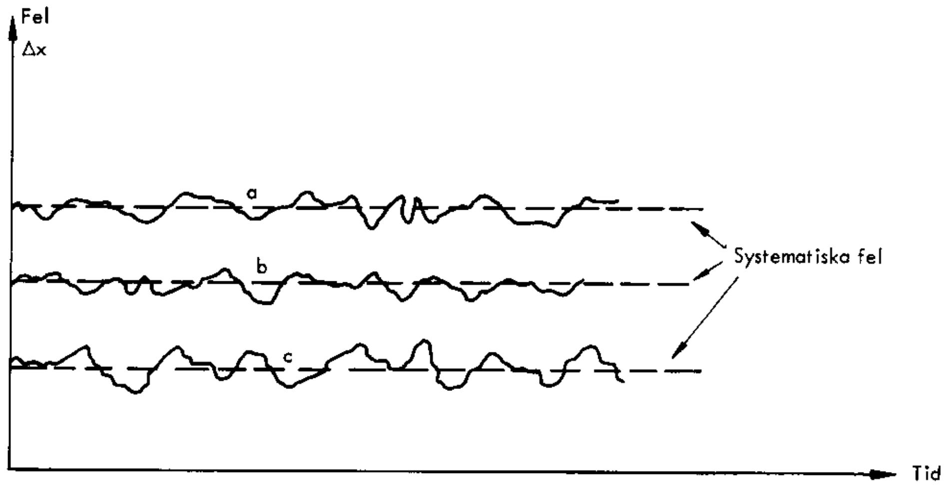


Bild 3 Ett instruments felvariationer med tiden i olika flygplan a, b och c

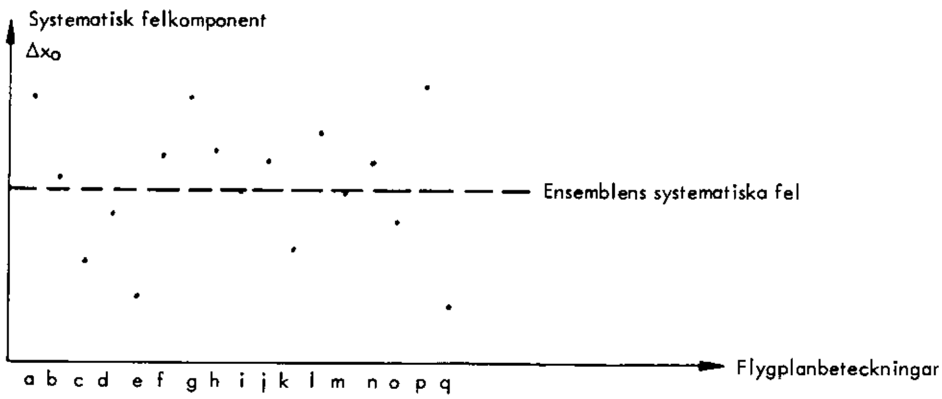


Bild 4 Den systematiska felkomponentens (i fig 6.102) variation med olika flygplan a, b, c . . .

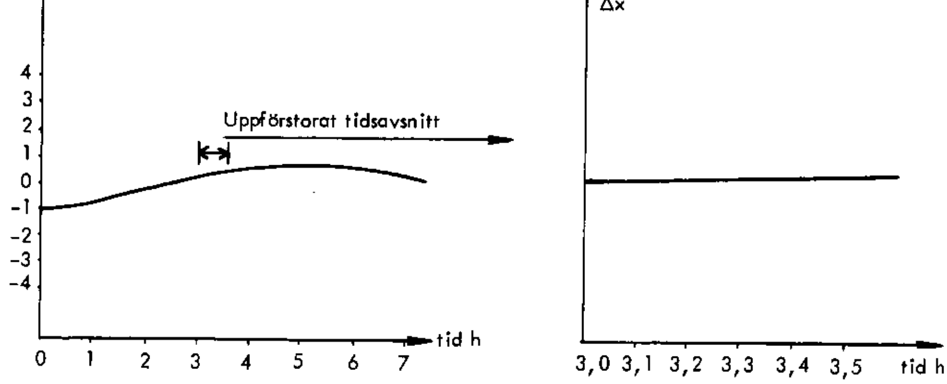


Bild 5 Långsamt varierande fel kan under en kort tidsperiod betraktas som systematiska fel

2 Statistisk beskrivning av fel

De slumpmässiga, stokastiska felen kan som nämnts beskrivas med statistiska metoder. Vi kan uppfatta felet som en *stokastisk variabel* och skall nu se vad som gäller för stokastiska variabler.

Anta först att felet, dvs den stokastiska variabeln, endast kan anta vissa diskreta värden. Vi betecknar sannolikheten för att ett fel antar ett visst värde a_1 för p_1, ett värde a_2 för p_2 osv. Sannolikheterna $p_1, p_2 \ldots$ är ett mått på med vilken frekvens felet antar värdena a_1, a_2 osv. Bild 6 visar i histogramform sannolikheterna för att felet antar värdena $a_1, a_2, a_3 \ldots$ etc. Detta histogram kan betraktas som en diskret *frekvensfunktion* för felet.

Anta nu att felet kan variera kontinuerligt. Vi betecknar felet, dvs den stokastiska variabeln med X. Sannolikheten för att X antar ett värde mellan två punkter a och b betecknas $P\,(a < X \leqslant b)$. Dela nu in tallinjen i ett antal lika stora intervall och beräkna sannolikheterna för att X antar värden i respektive intervall. Om vi hänför dessa sannolikheter till mittpunkterna i respektive intervall erhålls ett histogram av samma typ som tidigare. Se bild 7. Gör nu intervallen

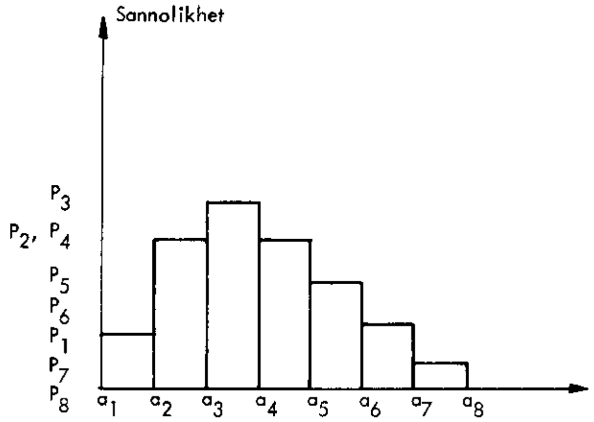


Bild 6 Diskret frekvensfunktion för ett fel

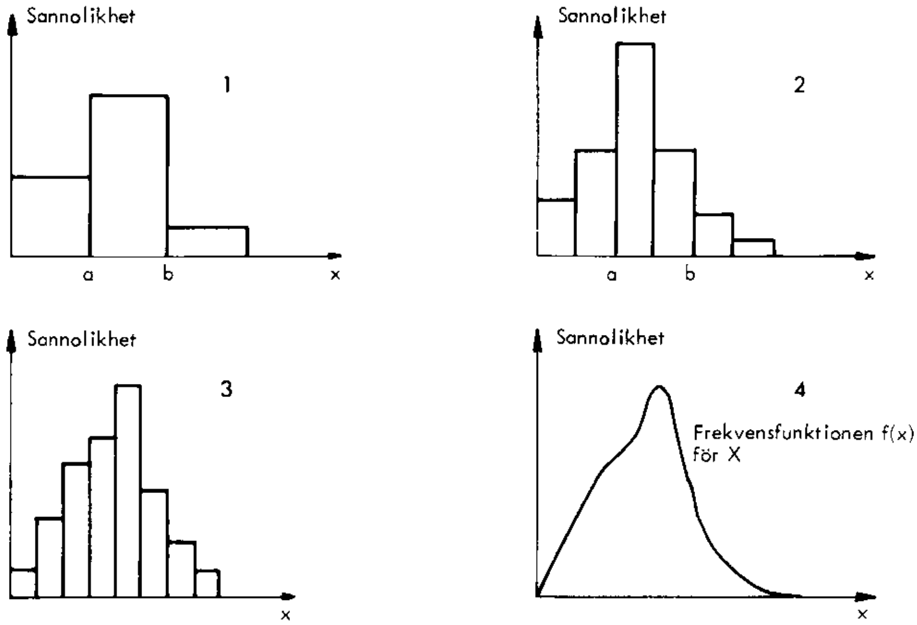


Bild 7 Kontinuerlig frekvensfunktion vid approximation med histogram

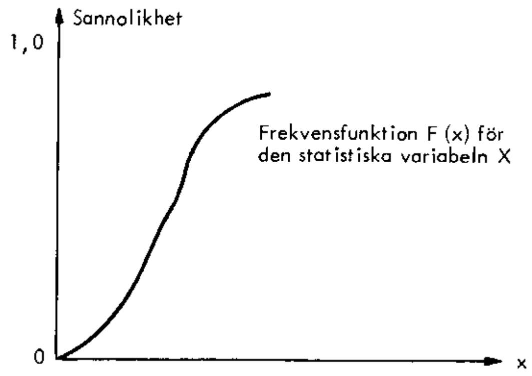


Bild 8 Fördelningsfunktion för den statistiska fördelning som har frekvensfunktion enligt bild 7

allt mindre och ändra samtidigt skalan på sannolikhetsaxeln så att den totala arean i histogramstaplarna blir konstant. Då intervallen blir allt mindre kan man approximera histogramtopparna med en kontinuerlig linje. Denna linje representerar frekvensfunktionen eller sannolikhetsfördelningen för X. Frekvensfunktionen kallas också för *täthetsfunktionen* för den stokastiska variabeln X eftersom den beskriver sannolikhetstäthten. Frekvensfunktion för en stokastisk variabel betecknas ofta med f (x).

Beteckna sannolikheten för att X antar värden mindre eller lika med ett tal x som F (x).

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

F (x) är *fördelningsfunktionen* för den stokastiska variablen X. Se bild 8. De statistiska fördelningsfunktionerna för mätfel av olika slag kan ofta approximeras med fördelningsfunktionerna för en normalfördelning eller rektangelfördelning. Se bilderna 9–12.

Observera att fördelningsfunktionen antar värden i intervallet 0–1. Arean under frekvensfunktionen är alltid lika med enhetsarean.

3 Medelvärde och spridning

I många sammanhang är man intresserad av *medelvärdet* för en stokastisk variabel X. Medelvärdet betecknas E [X] eller m och uttrycks för en diskret fördelning som

$$E[X] = m = \sum_{\nu} p_{\nu}\, x_{\nu}$$

där p_{ν} är sannolikheten att X antar värdet x_{ν}. För en kontinuerlig fördelning är uttrycket för medelvärdet

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

f(x) är frekvensfunktionen för X. E [X] kallas också för förväntansvärdet för X.

En stokastisk variabels fördelning är inte särskilt väldefinierad av sitt medelvärde. För ett fel där man eliminerat den systematiska komponenten blir n medelvärdet noll. Man vill gärna veta hur stor avvikelse från medelvärdet som man har anledning att räkna med. Ett vanligt mått på avvikelsen är *spridningen* eller *standardavvikelsen* som definieras som

$$D[x] = \sigma = \sqrt{E[(X - m)^2]}$$ m betyder medelvärdet för X

$$D^2[X] = E[(x - m)^2] = \sigma^2$$ kallas för *variansen* för X

Variansen är det kvadratiska *medelvärdet för avvikelserna* från fördelningens medelvärde. Standardavvikelsen σ kallas även för *medelavvikelse.*

Vill man ur ett antal mätningar, t ex instrumentavläsningar, på en oförändrad storhet få en uppfattning om felet i mätningen kan man uppskatta standardavvikelsen. Antag att de uppmätta värdena är $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$. Medelvärdet

$$m = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)/n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Variansen σ^2 uppskattas ur sambandet

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

Standardavvikelsen σ uppskattas som kvadratroten ur variansen

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2}$$

Egentligen bör man vid beräkningen av σ^2 istället för $1/n$ använda $1/(n-1)$ eftersom annars standardavvikelsen uppskattad ur en mätning blir noll vilket är orimligt.

Variabeln $(X-m)/\sigma$ uttrycker X:s avvikelse från sitt medelvärde mätt med standardavvikelsen som enhet.

Medelvärdet $E[\frac{X-m}{\sigma}] = 0$

Standardavvikelsen $E[\frac{X-m}{\sigma}] = 1$

$(X-m)/\sigma$ är den mot X svarande *normerade* variabeln.

Två stokastiska variabler X och Y säges vara *oberoende* om deras förenade frekvensfunktion $f_{x,y}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$. Detta innebär att frekvensfunktionen för X, $f_x(x)$ inte påverkas av vilka värden som Y antar och vice versa. Praktiskt innebär det att de fel eller händelser som X representerar äger rum helt oberoende av de fel och händelser som Y representerar och tvärtom.

Har man två oberoende variabler X och Y, så gäller för summan X + Y, att

$$D^2[X+Y] = D^2[X] + D^2[Y]$$

Dvs för oberoende variabler adderas varianserna kvadratiskt.

Låt oss som *exempel* betrakta reaktangulärfördelningen vilken är en statistisk fördelning som gäller för vissa fel. Rektangulärfördelning innebär att sannolikheten för att ett fel skall anta ett godtyckligt värde inom ett intervall är konstant.

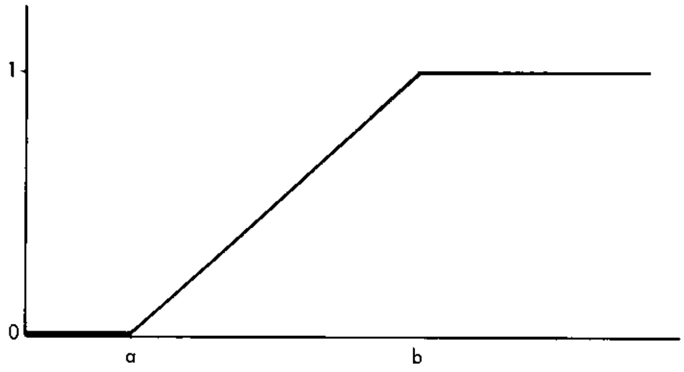


Bild 9 Fördelningsfunktion för rektangulärfördelning i intervallet (a, b)

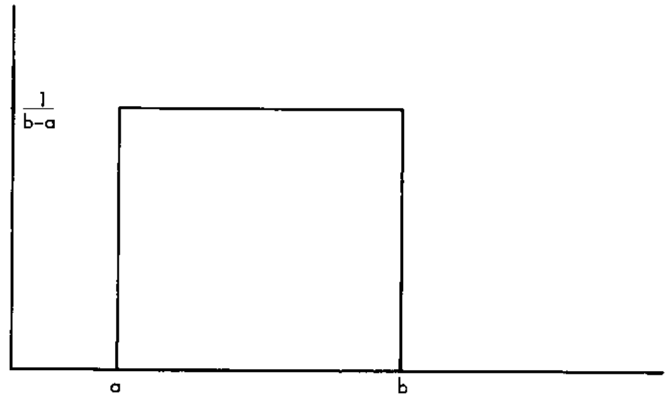


Bild 10 Frekvensfunktion för rektangulärfördelning i intervallet (a, b)

Fördelnings- och frekvensfunktionerna framgår av bilderna 9 och 10. Frekvensfunktionen f (x) = 1/(b—a) för intervallet a <x <b och i övrigt noll.

$$\text{Medelvärde } m = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{Variansen } \sigma^2 = E\,[(X-m)^2] = \int_a^b (x-m)^2 \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Dvs om intervallet b—a = 1 blir variansen = $\frac{1}{12}$ och standardavvikelsen $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vid rektangulärfördelade fel är sannolikheten att felet är mindre än standardavvikelsen (1 σ)

$$P\left(x < \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \int_{\frac{1}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} 1 \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$$

Felet är alltid mindre än dubbla standardavvikelsen.

Anta att vi mäter en storhet med n stycken instrument och vet att mätfelens standardavvikelse σ, är densamma för alla instrument. Vi vet dessutom att mätfelen är helt oberoende av varandra. Då är standardavvikelsen σ_n för det aritmetiska medelvärdet av mätvärdena

$$\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Dvs mätfelet minskar proportionellt mot kvadratroten ur antalet instrument som används vid mätningen. Mätfelet minskar på ekvivalent sätt, då man med samma instrument mäter en storhet flera gånger och tar medelvärdet av mätningarna. Detta gäller för slumpmässiga fel. Ett systematiskt fel vid mätningarna kan inte elimineras genom att antalet mätningar ökas.

Om ett fel sammansätts av flera oberoende stokastiska komponenter, $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ med medelvärdena $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ och standardavvikelserna $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, så erhålls medelvärdet m och spridningen σ för summan $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ av uttrycken:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n$$

$$\sigma^2 = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 + \ldots \sigma_n{}^2$$

För oberoende variabler adderas alltså medelvärdena linjärt och spridningarna kvadratiskt.

Eftersom spridningen är ett mått på det stokastiska felet i en storhet innebär detta att stokastiska felkomponenter skall adderas kvadratiskt. Som exempel på detta betraktar vi kursfelet i ett modernt flygplan med s k fritt kursgyro. Felet sammansätts av initialinställningsfel och gyrodrift. Initalinställningsfelet kan i sin tur ha flera komponenter. Vi antar här att det består av referensriktningsfel ϵ_1 och ett inriktningsfel mot referensriktningen ϵ_2. Kursgyrodriften har på den aktuella flygtiden givit upphov till en felkomponent ϵ_3. Det totala felet ϵ beräknas ur

$$\epsilon^2 = \epsilon_1{}^2 + \epsilon_2{}^2 + \epsilon_3{}^2$$

Dvs

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1{}^2 + \epsilon_2{}^2 + \epsilon_3{}^2}$$

4 Normalfördelning

Positionsfel, kursfel, mätfel i radionavigeringssystem etc är i regel sammansatta av en mängd olika felkomponenter. Fel av denna karaktär är statistiskt normalfördelade. I praktiken ansluter felens fördelningar inte helt till normalfördelningen men avvikelserna är så små att man kan bortse från dem. Detta gäller speciellt som man i regel inte exakt kan bestämma hur felens statistiska fördelning ser ut.

Den normala fördelningsfunktionen (bild 11) brukar betecknas Φ

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

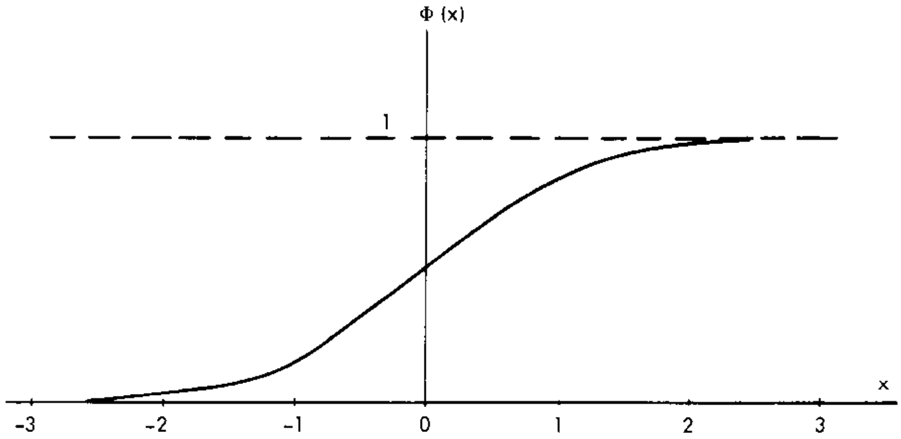


Bild 11 Den normala fördelningsfunktionen Φ (x)

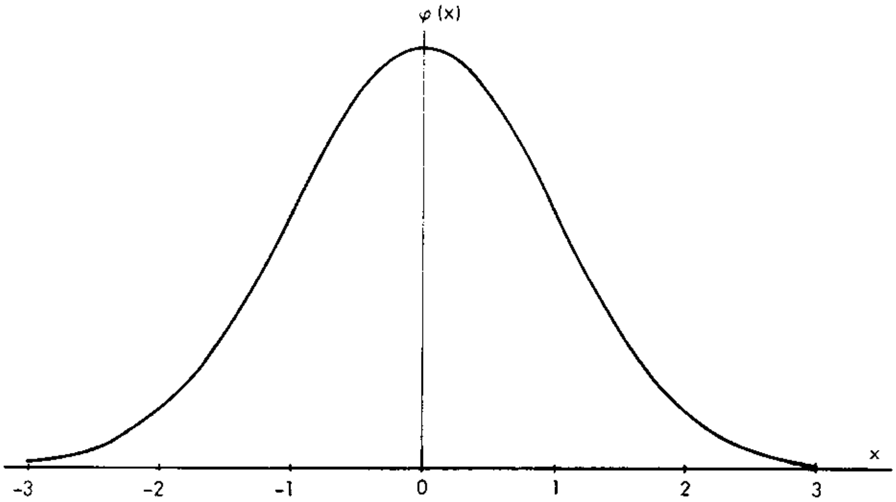


Bild 12 Den normala frekvensfunktionen φ (x)

Frekvensfunktionen (bild 12) betecknas φ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Fördelningen är symmetrisk kring nollpunkten och har medelvärdet noll. Variansen $\sigma^2 = 1$.

Nu har en normalfördelad stokastisk variabel X i regel inte medelvärdet noll eller standardavvikelsen 1. Bilda därför den stokastiska variabeln $(X-m)/\sigma$ där m och σ är medelvärde respektive standardavvikelse till X. $(X-m)/\sigma$ har då fördelningsfunktionen Φ (x) och frekvensfunktionen φ (x). Frekvensfunktionen för X är

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Adderas oberoende normalfördelade variabler med medelvärdena m_1, m_2, m_3 . . . och standardavvikelserna $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . . ., erhålls en ny normalfördelning med medelvärde m och standardavvikelse σ givna av uttrycken

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$$

$$\sigma^2 = \sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 + \ldots$$

5 Fördelningar i flera dimensioner

Vissa fel, t ex positionsfel och hastighetsfel, måste för att fullständigt beskrivas uttryckas i två eller tre dimensioner. Den statistiska fördelning som man har störst anledning att syssla med är normalfördelningen i två eller flera dimensioner, eftersom felen ganska väl ansluter till denna.

Normalfördelningen i två dimensioner har följande frekvensfunktion om variablerna i de två koordinataxelriktningarna x och y är oberoende

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 \quad \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

Bild 13 ger en visuell uppfattning av en tvådimensionell normalfördelning. Frekvensfunktionen kan uppfattas som en *frekvensyta.*

6 Korrelation

Man säger att två stokastiska fel eller variabler är *korrelerade* om de beror av varandra. Om t ex sannolikheten är större för ett stort positionsfel i nordriktningen då positionsfelet i östriktningen är stort än då det är litet, så är positions-

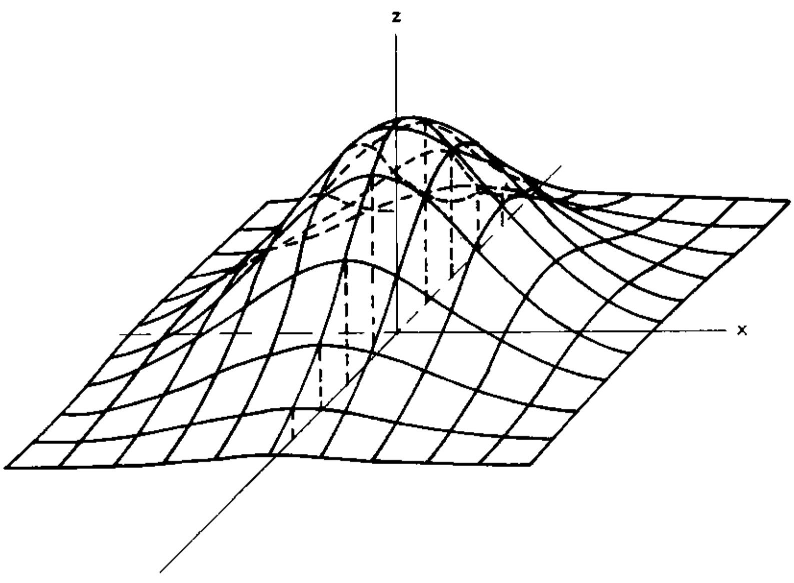


Bild 13 Frekvensfunktionen för en tvådimensionell normalfördelning

felet i nord- och östriktningarna positivt korrelerade. Denna korrelation uttrycks med en *korrelationskoefficient* ρ. Det gäller att

$$-1 \leqslant \rho \leqslant 1$$

För att matematiskt kunna uttrycka korrelationen måste vi beräkna en storhet μ_{xy}

$$\mu_{xy} = E\,[\,(X-m_x)\ (Y-m_y)\,]$$

Dvs μ_{xy} är medelvärdet av produkten av skillnaderna mellan de stokastiska variablerna och deras medelvärden. Korrelationskoefficienten ρ beräknas ur

$$\rho = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

Är $\rho = 0$ är variablerna okorrelerade. $\rho = 1$ innebär att felen alltid är proportionella och har samma tecken. $\rho = -1$ innebär att de är proportionella men har motsatt tecken. Då $\rho = \pm 1$ finns ett *fullständigt beroende* mellan de två variablerna. Det bör observeras att oberoende variabler alltid är okorrelerade.

Vill man beräkna korrelationen mellan två mätinstrument gör man en serie parvisa mätningar och beräknar spridningarna för vardera instrumentet. Dessutom beräknas μ_{xy} som

$$\mu_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)(y_i - m_y)$$

x_i och y_i är här de samtidigt uppmätta värden med de två instrumenten. Korrelationskoefficienten ρ blir då

$$\rho = \frac{\Sigma\,(x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sqrt{\Sigma\,(x_i - m_x)^2 \cdot \Sigma\,(y_i - m_y)^2}} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

Ofta är man inte enbart intresserad av ett mätvärde och dess stokastiska mätfel vid enstaka tillfällen. Man vill ha mätinformationen kontinuerligt eller åtminstone med korta tidsmellanrum. Under dessa förhållanden är successiva mätningar ofta behäftade med korrelerade fel. Dvs felet varierar slumpartat men variationerna kan inte ske hur snabbt som helst. Betrakta bild 14. Felet i närheten av tidpunkten t_0 beror av felet vid t_0. Korrelation mellan felen i successiva mätningar av en tidsvariabel storhet kallas för *autokorrelation.*

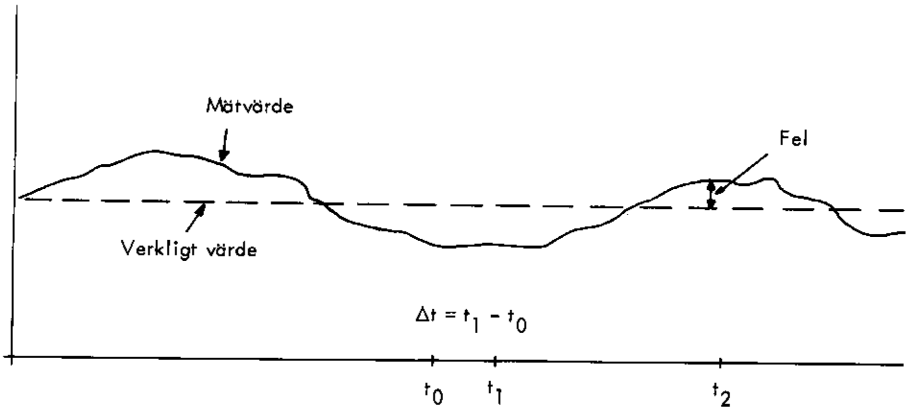
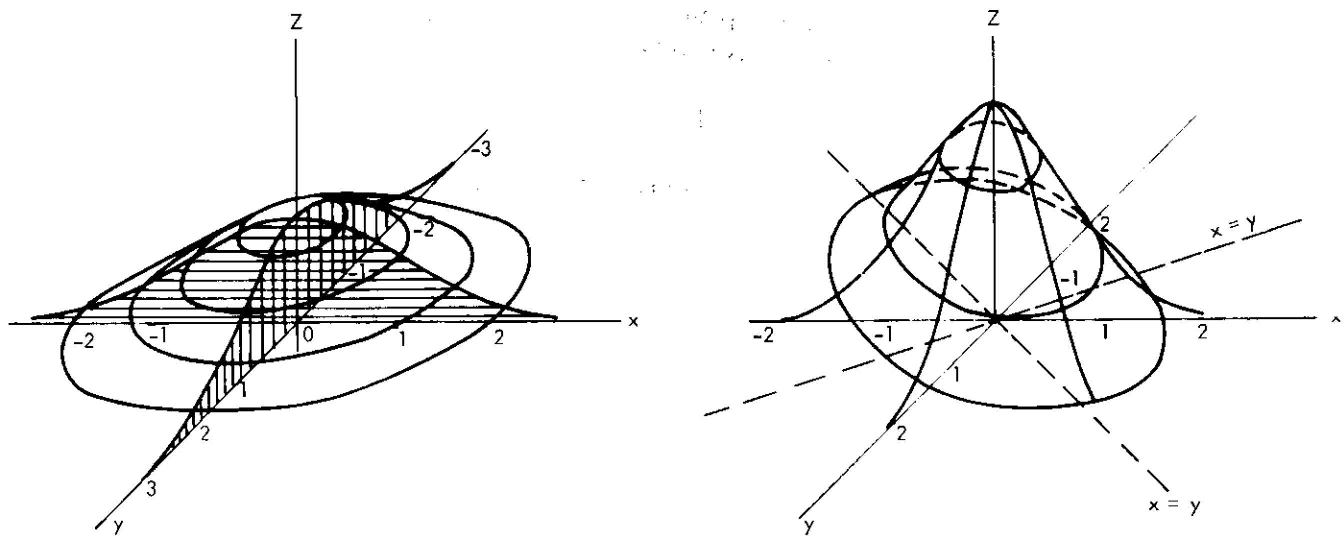


Bild 14 Mätfelets tidsberoende



$\sigma_x = \sigma_y = 1 \quad \rho = 0$ $\qquad$ $\sigma_x = \sigma_y = 1 \quad \rho = 0{,}707$

Bild 15 Jämförelse mellan korrelerad (t v) och okorrelerad (t h) tvådimensionell normalfördelning

Korrelationen är en funktion av tiden mellan mätningarna. Denna funktion kallas för autokorrelationsfunktion. Korrelationen avtar med tiden, dvs ju större tidsskillnaden Δt är mellan tidpunkterna t_0 och t_1 på bild 14 desto mindre är korrelationen. Ofta avtar korrelationen exponentiellt med tiden. Man talar då också om *korrelationstid* vilket är den tid då korrelationen minskat till $1/e = 0.37$. I praktiken anges korrelationstiden för att indikera att korrelationen har betydelse för kortare tider, men saknar betydelse för längre tider.

Den tvådimensionella normalfördelningen för två korrelerade stokastiska variabler har följande frekvensfunktion

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\frac{(y-m_y)}{\sigma_y} + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$

Bild 15 visar visuellt skillnaden mellan en okorrelerad tvådimensionell cirkulär fördelning där $m_x = m_y = 0$ och $\sigma_x = \sigma_y = 1$ och en fördelning med $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$ och $\rho = 1\ \sqrt{2}$. Vi ser att sannolikhetsmassan koncentreras till linjen $x = y$ hos den korrelerade fördelningen.

Uttrycket för den *okorrelerade cirkulära tvådimensionella normalfördelningen* där $m_x = m_y = 0$ är

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma^2}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2}}$$

Substituerar vi $(x^2 + y^2)$ med r^2, vilket är det kvadratiska avståndet från medelvärdet origo erhålls

$$f(r) = \frac{r}{\sigma^2}\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma}} \qquad \text{för } r \geqslant 0$$

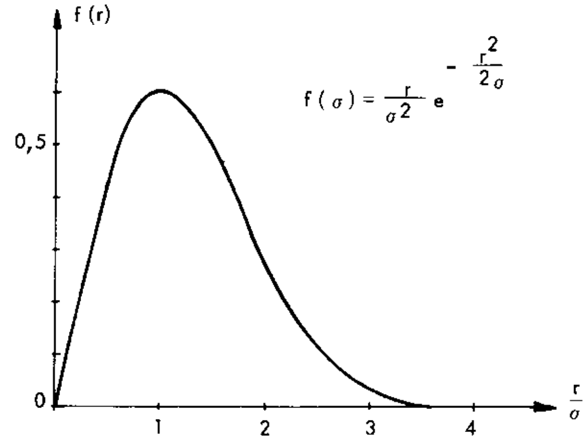


Bild 16 Frekvensfunktionen för den cirkulära tvådimensionella normalfördelningen, Rayleighfördelningen

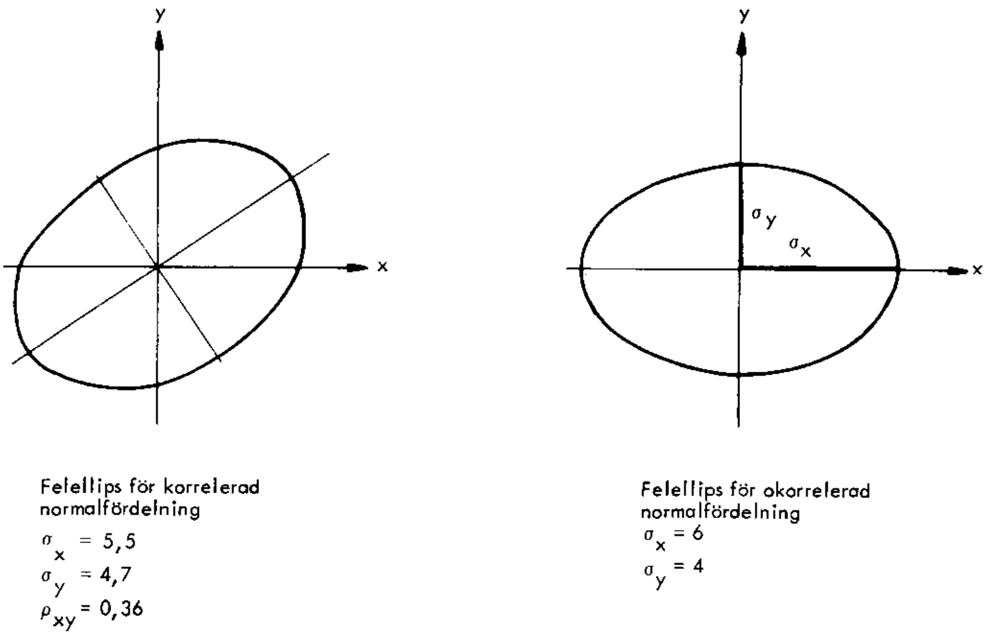


Bild 17 Felellipser för korrelerade och okorrelerade fel

Denna fördelning kallas även för *Rayleighfördelning*. Se bild 16. Positionsfel där sannolikheten för en viss storlek på felet är lika i alla riktningar är Rayleighfördelade.

Ett sätt att representera tvådimensionella normalfördelade fel är med s k felellipser. En felellips är en skärning mellan normalfördelningens frekvensyta och ett plan parallellt med koordinataxelplanet ovanför detsamma. Felellipsen är en kurva för konstant felsannolikhetstäthet.

Är de två variablerna i en tvådimensionell normalfördelning okorrelerade, så sammanfaller felellipsens huvudaxelriktningar med koordinataxelriktningarna. I annat fall ligger ellipsen snett (bild 17). Detta innebär att man genom att vrida koordinatsystemet så att koordinataxlarna och ellipsens huvudaxlar sammanfaller kan uttrycka en tvådimensionell normalfördelning med okorrelerade variabler. Längden på felellipsens axlar är proportionella mot spridningarna i axelriktningarna.

7 Konfidensnivå CEP, d_{rms}

Då man anger att en utrustning har en viss noggrannhet, t ex att en DME har noggrannheten 400 m, så har detta ingen innebörd, såvida man inte samtidigt talar om sannolikheten för att det angivna beloppet överskrids.

Normalfördelade fel i en dimension är helt bestämda av medelvärde och spridning. Sannolikheten för att felet avviker från medelvärdet mer än ett visst antal gånger spridningen σ framgår av bild 18. Då man anger fel brukar man ange spridningen (1 σ), dubbla spridningen (2 σ) och ibland 3- eller 4-dubbla spridningen (3 σ), (4 σ). Sannolikheten för att ett fel *inte* avviker från medelvärdet mer än dessa belopp framgår av tabell 1.

Anger man ett stokastiskt fel till ϵ och därmed menar att ϵ är lika med dubbla spridningen säger man att felet ϵ har *konfidensnivån* eller konfidensgraden 2 σ. Populärt säger man att ϵ är angivet på 2 σ-nivå. Detta betyder att sannolikheten för att felet överstiger värdet ϵ är 1–0,955 = 0,045, dvs 4,5 %.

Ett annat och bättre sätt att ange konfidensnivån är att ange sannolikheten för att felet inte överstiger uppgivet värde. Säger man t ex att kursfelet är $1{,}5^{\circ}$ med 95 % konfidens innebär detta att felet med sannolikheten 0,95 understiger $1{,}5^{\circ}$. Observera att för endimensionella normalfördelade fel är konfidensnivåerna »2 σ» och »95 %» nästan lika. I praktiken används de ofta synonymt.

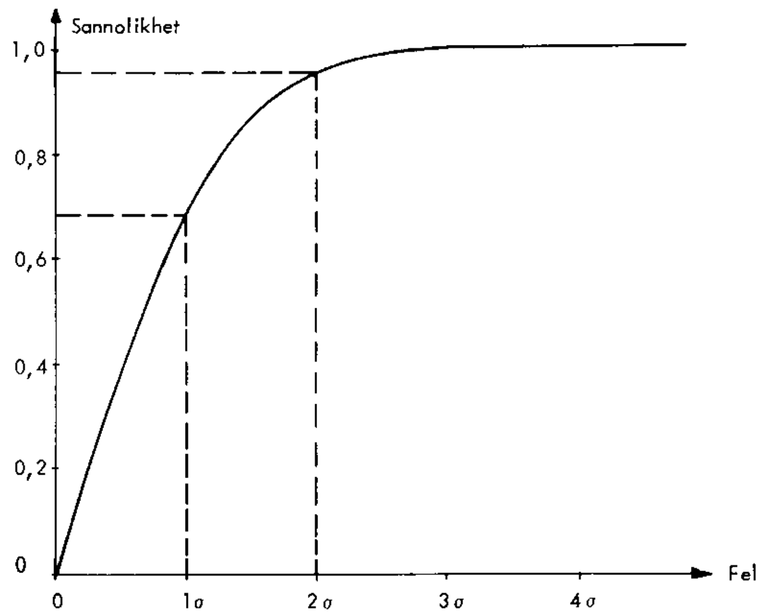


Bild 18 Endimensionell normalfördelning. Sannolikheten att felets belopp överstiger vissa spridningsmått

Tabell 1.

Spridning	Sannolikhet att felet inte avviker från medelvärdet
1 σ	0.683
2 σ	0.9555
3 σ	0.9973
4 σ	0.99995

Konfidensnivå angiven som sannolikhet, dvs som %-nivå, kan användas för alla statistiska fördelningar i såväl en som flera dimensioner. Konfidensnivå angiven i form 1σ, 2σ, 3σ etc har olika sannolikhetsinnebörd för olika fördelningar. Ett rektangulärfördelat fel kan t ex aldrig bli så stort som 2σ. När man anger fel med en konfidensnivå 1σ eller 2σ underförstår man i regel att felet är normalfördelat och endimensionellt eller rättare sagt man borde endast använda benämningarna i detta sammanhang. Tyvärr anger man ofta konfidensnivån som 1σ eller 2σ även för andra fördelningar, t ex tvådimensionella normalfördelningar. Detta är oprecist, för även om spridningarna för båda variablerna är lika så varierar konfidensnivån beroende på korrelationen mellan variablerna. Likaså är det stor skillnad mellan konfidensnivån angiven i σ-nivå för den endimensionella och den tvådimensionella cirkulära fördelningen och normalfördelningen. Sannolikheten att felet understiger 1σ, 2σ och 3σ för endimensionell och tvådimensionell cirkulär normalfördelning (σ = spridningen för varje variabel) framgår av tabell 2.

I praktiken är ofta tvådimensionella normalfördelningar (t ex positionsfel) elliptiska, dvs $\rho \neq 0$ eller $\sigma_x \neq \sigma_y$. Att i detta sammanhang tala om $2\ \sigma$, vilket förekommer, är ej lämpligt. I regel torde det vara så att när ett mått anges på »2 σ-nivå» för ett tvådimensionellt fel, menar man att sannolikheten är 95 % för att felet, sett som ett radiellt fel, understiger angivet värde. Det är då bättre att ange konfidensnivån till 95 %.

För tvådimensionella ellipsformade fel (t ex positionsfel) är man i många fall inte särskilt intresserad av ellipticiteten, dvs att sannolikheten är större för ett stort fel i ellipsens storaxelriktning. Vad man vill veta är sannolikheten för att felet ej överstiger ett visst värde oavsett riktningen. Är t ex felellipsen för konfidensnivån 95 % given vill man i stället ange den cirkel för vilken sannolikheten är 95 % att felets belopp understiger radien. Se bild 19. Till skillnad från motsvarande ellips är inte sannolikhetstätheten konstant längs denna cirkel. Beloppet av ett fel motsvarande radien i den cirkel som för en viss konfidensnivå

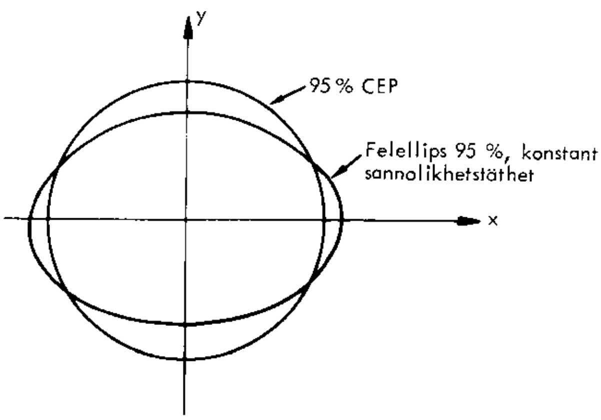


Bild 19 Konfidensnivå angiven som cirkulärfel jämfört med felellips med samma konfidensnivå

Tabell 2.

Spridning	Fördelning Endim	Tvådim
1 σ	0,683	0,393
2 σ	0,9555	0,8657
3 σ	0,9973	0,9889

måste avskära en godtycklig tvådimensionell statistisk fördelning brukar benämnas *CEP*. CEP betyder circular error probability. I praktiken har CEP kommit att betyda CEP med konfidensnivån 50 %, dvs felets CEP-värde motsvarar radien i den cirkel inom vilken felet finns med 50 % sannolikhet.

En annan beteckning som ofta förekommer vid tvådimensionella fördelningar är d_{rms} (rms står för root mean square). Se bild 20.

$$d_{rms} = \sqrt{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2}$$

σ_x och σ_y är spridningarna i ellipsens huvudaxelriktningar. Ibland kallas d_{rms} för den tvådimensionella fördelningens spridning. Det är mindre lämpligt att som ett mått på konfidensnivå ange felen i förhållandet till d_{rms} eller 2 d_{rms}. Således motsvarar konfidensnivån 2 d_{rms} i regel ej 95 % konfidens vilket ibland felaktigt antyds.

Bilderna 21–23 illustrerar i någon mån hur begreppen σ_x, σ_y, CEP och d_{rms} är relaterade till varandra och konfidensnivån för tvådimensionella normalfördelningar.

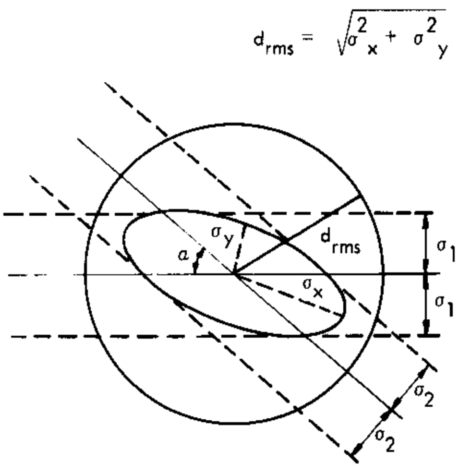


Bild 20 Illustration av d_{rms}

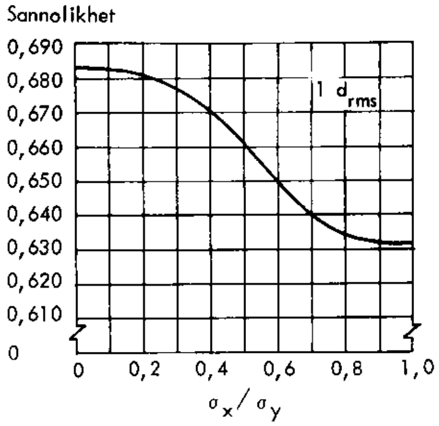


Bild 21 Variation i d_{rms} med ellipticiteten – 1 d_{rms}

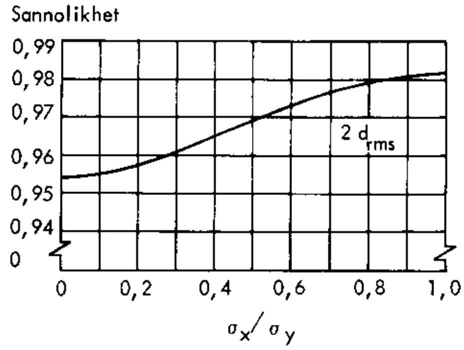


Bild 22 Variation i d_{rms} med ellipticiteten – 2 d_{rms}

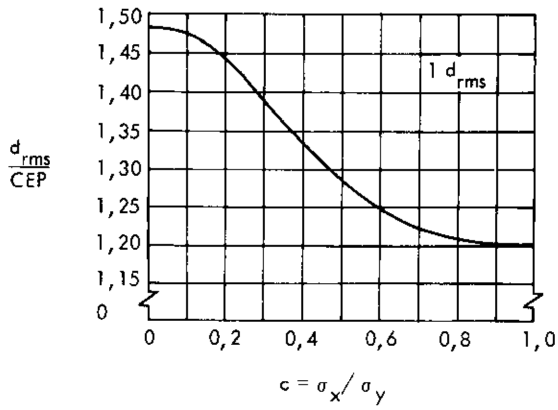


Bild 23 Förhållandet mellan 1 d_{rms} och CEP som funktion av ellipticiteten

8 Fel vid ortlinjeskärningar

En positionsbestämning innebär ofta att man bestämmer skärningen mellan två ortlinjer. Ortlinjebestämningarna är emellertid behäftade med vissa fel som ger upphov till positionsfel. Man vill gärna utgående från de statistiskt kända felen i ortlinjebestämningarna få en statistisk feluppskattning för positionsfelet. Bortser man från systematiska fel innebär detta att man ur de stokastiska felen i ortlinjebestämningarna vill bestämma positionsfelellipsen. Detta problem är nu inte helt enkelt och vi skall endast ange vilka faktorer som är betydelsefulla och vilken inverkan de har.

Ortlinjerna approximeras med räta linjer i skärningspunkten. Se bild 24 och 25.

α = skärningsvinkel mellan ortlinjerna

σ_1, σ_2 = de stokastiska felens standardavvikelse i skärningspunkten

ρ_{12} = korrelationskoefficienten för de stokastiska felen

Ur dessa data kan standardavvikelserna i felellipsens huvudaxelriktningar beräknas, dvs felellipsen kan bestämmas. Då felellipsen är känd, kan konfidensnivån anges som CEP-värde. Uttrycken för hur standardavvikelserna i ellipsens huvudaxelriktningar beräknas är ganska komplicerade, särskilt om ρ_{12} är skild från noll. I stort sett gäller att ju mindre värdet på α är, desto smalare blir ellipsen. Tabell 3 visar några exempel på felellipser för okorrelerade ortlinjefel. Felet ökar ungefär som $1/\sin \alpha$.

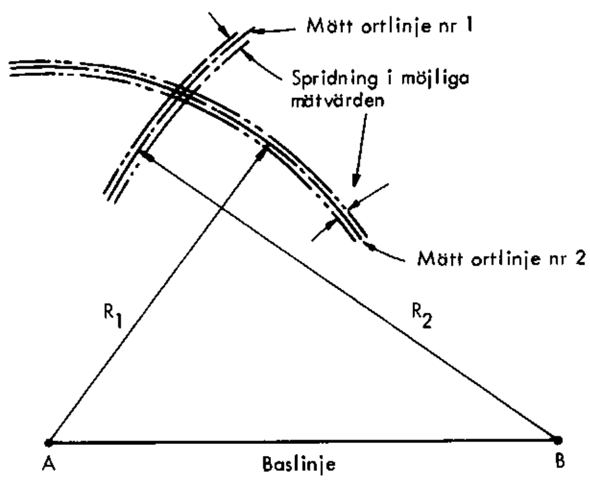


Bild 24 Positionsbestämning genom skärning av två ortlinjer

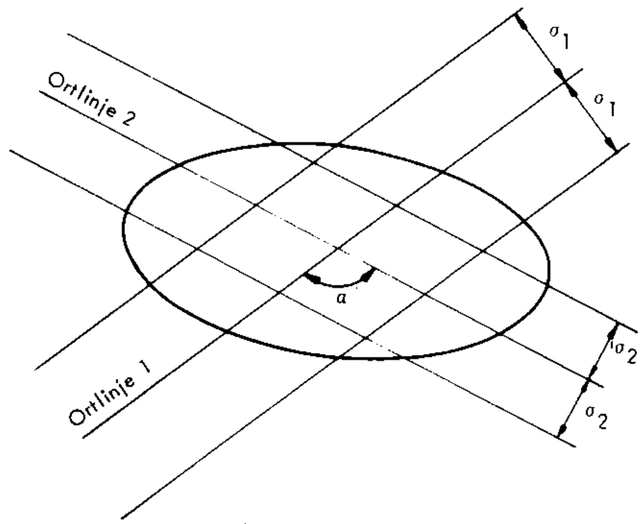


Bild 25 Förstorad bild av ortlinjeskärning

För det enkla fall då $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ blir standardavvikelserna i axelriktningarna

$$\sigma_x = \frac{\sigma\sqrt{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

Bild 26 visar hur felet uttryckt som CEP respektive 90 % signifikansnivåcirkel ändras som funktion av skärningsvinkeln α.

Man bör observera att värdena på σ_1 och σ_2 ofta varierar högst avsevärt beroende på var man befinner sig. Är t ex ortlinjen en riktning från en radiofyr, VOR, TACAN eller NDB, så är felets standardavvikelse proportionell mot avståndet till radiofyren. I hyperbelsystem divergerar ortlinjerna, hyperblerna, på längre avstånd från markstationerna. Ortlinjefelets standardavvikelse är proportionell mot denna divergens.

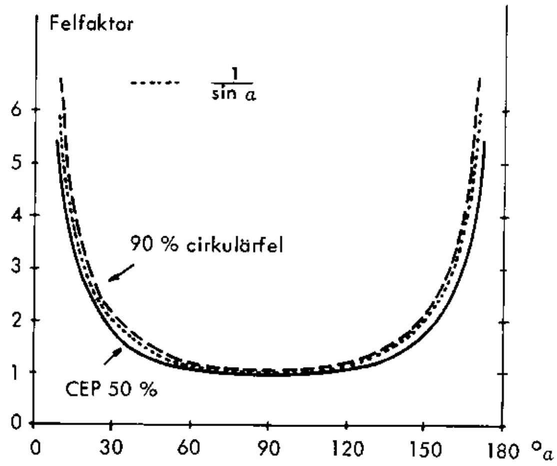


Bild 26 CEP och 90 % cirkulärfel variation med skärningsvinkeln α

Tabell 3. σ_x, σ_y *och CEP variation med skärningsvinkeln α*

α	σ_x	σ_y	c	CEP
90^o	1,0	1,0	1,0	1,18
80^o	1,10	0,92	0,84	1,19
70^o	1,23	0,87	0,70	1,23
60^o	1,41	0,82	0,58	1,29
50^o	1,67	0,78	0,47	1,42
40^o	2,06	0,75	0,36	1,62
30^o	2,74	0,73	0,27	2,01
20^o	4,06	0,72	0,18	2,85
10^o	8,11	0,71	0,09	5,52

Det finns många andra faktorer som inverkar på σ_1 och σ_2, t ex variationer i signalstyrka, interfererande signaler, ljusförhållanden etc beroende på typ av system som genererar informationen. Vid praktisk fixtagning genom ortlinjebestämning bör man försöka välja en punkt där skärningsvinkeln är mellan 60^o och 120^o och där σ_1 och σ_2 är så små som möjligt.

För tabell 3 gäller att

- standardavvikelserna i mätvärdena är σ_1 och σ_2
- $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ och okorrelerade
- α = vinkel mellan ortlinjerna
- σ_x = spridningen i ellipsens storaxelriktning
- σ_y = spridningen i ellipsens lillaxelriktning
- $c = \sigma_y / \sigma_x$

Har man mer än två ortlinjer, skär dessa i regel inte varandra i en punkt. Det bildas ett område med skärningspunkter där det gäller att bestämma den mest »sannolika» positionspunkten. Vid manuell navigering får man välja en punkt mitt i men under beaktande att den verkliga positionen sannolikt avviker minst från de ortlinjer som har minst spridning. Sker positionsbestämningen automatiskt kan man välja positionspunkten så att variansen, dvs d_{rms}, i den uppkomna felellipsen minimeras.

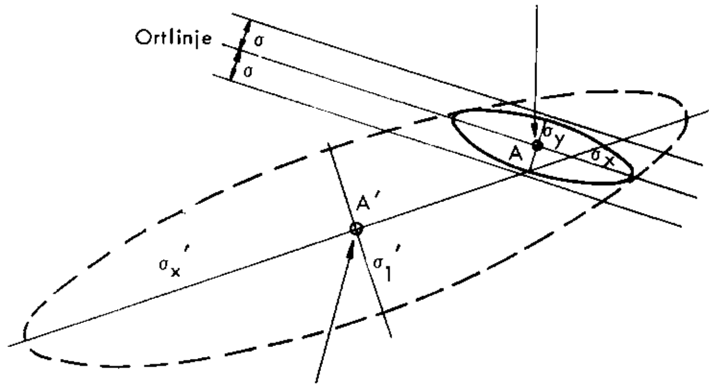


Bild 27 Sammanlagring av dödräknad position (med felellips) och ortlinje

I ett modernt automatiskt navigationssystem beräknar man ofta positionsfelellipsen kontinuerligt med hänsyn till dels felet och feltillväxten från dödräkningssystemet, dels felet i ortlinjebestämningarna. Efter en ortlinjebestämning beräknas den nya felellipsen med hänsyn till dels den tidigare felellipsen, dels feluppskattningen i ortlinjebestämningen. Man försöker därvid utföra beräkningen så att man minimerar variansen d_{rms} i den nya ellipsen. Se bild 27 där

σ_x' och σ_y' är spridningarna i felellipsen före ortlinjebestämningen

σ_x och σ_y är spridningarna i felellipsen efter ortlinjebestämningen

A väljs så att $d_{rms} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$ minimeras då σ_x och σ_y beräknas på rätt sätt.

En avancerad tillämpning av denna beräkning eller filtrering är s k Kalmanfiltrering. Se vidare avsn 14.4.